

Correction du CC1

Question de cours (4 points)

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F .

1. Donner la définition du noyau de f . (2 points)
2. Énoncer le théorème du rang. (2 points)

Correction

1. $\ker(f) = \{\vec{u} \in E, f(\vec{u}) = 0_F\}$
2. $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$

Exercice 1. (6 points)

On considère les sous-ensembles de \mathbb{R}^3 suivants : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$.

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 . (2 points)
2. Donner une base et la dimension de chacun d'eux. (2 points)
3. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$. (2 points)

Correction exercice 1

1. $\vec{0} = (0, 0, 0)$ vérifie $0 + 0 + 0 = 0$ donc $\vec{0} \in E$

Soient $\vec{u} = (x, y, z) \in E$ et $\vec{u}' = (x', y', z') \in E$, donc $x + y + z = 0$ et $x' + y' + z' = 0$

Soient λ et λ' deux réels

$$\lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}' = \lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z') = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') = (X, Y, Z)$$

$$X + Y + Z = \lambda x + \lambda' x' + \lambda y + \lambda' y' + \lambda z + \lambda' z' = \lambda(x + y + z) + \lambda'(x' + y' + z') = 0$$

Donc $\lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}' \in E$, ce qui montre que E est un sous-espace-vectoriel de \mathbb{R}^3 .

$\vec{0} = (0, 0, 0)$ vérifie $0 = 0 = 0$ donc $\vec{0} \in F$.

Soient $\vec{u} = (x, y, z) \in F$ et $\vec{u}' = (x', y', z') \in F$, donc $x = y = z$ et $x' = y' = z'$

Soient λ et λ' deux réels

$$\lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}' = \lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z') = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') = (X, Y, Z)$$

$$X = \lambda x + \lambda' x' = \lambda y + \lambda' y' = Y$$

$$X = \lambda x + \lambda' x' = \lambda z + \lambda' z' = Z$$

On a bien $X = Y = Z$, ce qui montre que $\lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}' \in F$ donc F est un sous-espace-vectoriel de \mathbb{R}^3 .

2.

$$\vec{u} = (x, y, z) \in E \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$$

Donc $\vec{u} = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$, on pose $a = (-1, 1, 0)$ et $b = (-1, 0, 1)$, on a

$E = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$ ce qui montre que E est un sous-espace-vectoriel de \mathbb{R}^3 , que (\vec{a}, \vec{b}) engendre E , comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre, il s'agit donc d'une base de E et alors $\dim(E) = 2$.

$$\vec{u} = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow x = y = z$$

$\vec{u} = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$ on pose $\vec{c} = (1, 1, 1)$ ce qui montre que $F = \text{Vect}(\vec{c})$ donc F est un sous-espace-vectoriel de \mathbb{R}^3 dont une base est (\vec{c}) et $\dim(F) = 1$.

3. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in E \cap F$, on a $x + y + z = 0$ et $x = y = z$, on en déduit aisément que $x = y = z = 0$, ce qui montre que $E \cap F = \{\vec{0}\}$ et que $\dim(E \cap F) = 0$, d'après la formule de Grassmann

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 2 + 1 - 0 = 3$$

On en déduit que $E + F = \mathbb{R}^3$ et d'après la question 2, $E \cap F = \{\vec{0}\}$, cela montre que

$$E \oplus F = \mathbb{R}^3$$

Autre méthode :

Comme précédemment $E \cap F = \{\vec{0}\}$ et comme $\dim(E) + \dim(F) = 2 + 1 = \dim(\mathbb{R}^3)$ on a

$$E \oplus F = \mathbb{R}^3$$

Exercice 2. (10 points)

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (-x + 4y - 2z, -x + 3y - z, -x + 2y)$$

1. Déterminer la matrice A de f par rapport à la base canonique. (3 points).
2. Déterminer une base du noyau de f . (4 points).
3. Déterminer la dimension de l'image de f . (3 points).

Correction exercice 2

1. Soit $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ les trois vecteurs de la base canonique
 $f(\vec{e}_1) = (-1, -1, -1) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$; $f(\vec{e}_2) = (4, 3, 2) = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$
et $f(\vec{e}_3) = (-2, -1, 0) = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

$$A = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix}$$

2.

$$\begin{aligned} \vec{u} = (x, y, z) \in \ker(f) &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\vec{u} = (2z, z, z) = z(2, 1, 1)$, on pose $\vec{a} = (2, 1, 1)$, c'est une base du noyau.

$$\ker(f) = \text{Vect}(\vec{a})$$

3. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 3 \Rightarrow \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = 2$$